Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol.31, No. 1, 45–71

Théorème de division avec des conditions au bord

Abdelhafed Elkhadiri

Abstract. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{O}(\Omega)$ be a subalgebra of the algebra of analytic functions on Ω. We suppose that $\mathcal{O}(\Omega)$ satisfies some weak conditions of noetherianity such that we can construct a finite stratification for each ideal of $\mathcal{O}(\Omega)$. We also suppose that $\mathcal{O}(\Omega)$ satifies global Łojasiewicz's inequalities. We prove the following: Let $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ and f C^∞ on $\overline{\Omega}$ flat on $\partial\Omega$; if for each $a \in \Omega$ the Taylor's serie of f at a, $T_a f$, is in the ideal generated by $T_a f_1, \ldots, T_a f_p$ in the ring of formal power series, then there exist $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, C^∞ on $\overline{\Omega}$ flat on $\partial\Omega$ such that $f = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j$. This result extends the classic Hormander's theorem of division (for a polynomial) or the Łojasiewicz-Malgrange theorem in the local analytic case.

Keywords: Łojasiewicz's inequalities, stratifications, Whitney functions.

1 Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\Omega)$ une sous algèbre de l'algèbre des fonctions analytiques sur Ω. On suppose que $\mathcal{O}(\Omega)$ vérifie deux types de conditions:

Conditions algébriques

On suppose que $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathcal{O}(\Omega)$, $\mathcal{O}(\Omega)$ est stable par dérivation et que Ω muni de la topologie de $SM\mathcal{O}(\Omega)$ (spectre maximal de $\mathcal{O}(\Omega)$) est un espace noethérien. De nombreuses algèbres vérifient cette hypothèse et on remarque qu'il est plus simple d'examiner cette hypothèse pour une algèbre que de voir si elle est noethérienne. Ces algèbres portent le nom d'algèbre Ω -noethériennes[1].

Received 16 July 1999.
Reherches menées dans le cadre du Programme d'Appui à la Recherche Scientifique (PARS MI 33)

Conditions métriques ([4])

Soit Γ une famille de fonctions continues réelles sur Ω vérifiant des conditions très simples (cf & 2). On suppose que pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$: $\gamma(x) \geq \mid f(x) \mid \geq \gamma(x)^{-1}\underline{d}(x, f^{-1}(0))^{\alpha}$ [où $\underline{d}(x, A) = inf(d(x, A), 1)$]. On dira que $\mathcal{O}(\Omega)$ vérifie une inégalité de Łojasiewicz de type Γ, ou que $\mathcal{O}(\Omega)$ est de type Γ.

Partant des polynômes, on peut construire de nombreuses algèbres vérifiant ces conditions [4]. L'objet de ce travail est de démontrer un théorème de division des fonctions C^{∞} sur un ouvert borné, Ω, qui sont plates sur le bord, $(\partial\Omega)$, par une famille finie d'eléments d'une algèbre Ω-noethérienne vérifiant les conditions métriques ci dessus pour la famille Γ des fonctions: $x \to c\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$, $c \geq 1$, $\alpha \geq 1$.

Thèoréme. *Soient $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre Ω-noethérienne de type Γ où Γ est la famille des fonctions $x \to c\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$, $c \geq 1$, $\alpha \geq 1$, $(g_1, \dots, g_q) \in \mathcal{O}(\Omega)^p$ et φ une fonction C^{∞} sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ plate sur $\partial\Omega$. On suppose qu'en tout point de Ω, φ est formellement divisible par $(g_1, \dots, g_q)$. Alors il existe $f_1, \dots, f_q$ C^{∞} sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ plates sur $\partial\Omega$ telles que $\varphi = f_1 g_1 + \dots + f_q g_q$.*

Ce résultat peut être considéré comme une extension des théorèmes de division de Hôrmander-Łojasiewicz-Malgrange. En effet si $\mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$ désigne l'algèbre des fonctions C^{∞} de $\overline{\Omega}$ sur $\mathbb{R}$ qui sont plates sur le bord; on a une injection $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$ ($\mathcal{D}(\Omega)$ désigne les fonctions C^{∞} sur Ω à support compact). Remarquons que $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$ si, et seulement si, pour tout $\omega \in \mathbb{N}^n$ et tout $\gamma \in \Gamma$, la fonction $\gamma\ D^{\omega}\phi$ est bornée sur Ω. On munie $\mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$ de la topologie: $\varphi_j \in \mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$, $\varphi_j \to 0$ si pour tout $\omega \in \mathbb{N}^n$ et tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\ D^{\omega}\varphi_j$ converge uniformement vers 0 dans Ω. Un élément T du dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$ peut être vu comme une distribution sur Ω. Le théorème de division classique nous permet de diviser T par $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i.e de trouver $S \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $fS = T$. L'objet de notre travail et de voir que l'on peut choisir S dans le dual de $\mathcal{E}(\Omega, \partial\Omega)$.

Dans [4] Tougeron a ennoncé, sans démonstration, un théorème de division des fonctions C^{∞} sur $\overline{\mathbb{R}^n}$ plates en dehors de Ω par les fonctions d'une algèbre Ω- noethérienne vérifiant les conditions métriques pour la famille : $x \to c(1+ \mid x \mid)^{\alpha}\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$. Si Ω est relativement compact le résultat ennoncé par Tougeron coïncide avec le notre. La démarche suivie dans cet article permet de donner une démonstration du théorème ennoncé par Tougeron. Remarquons que la version ennoncée par Tougeron permet d'avoir un théorème de division des distributions tempérées par les fonctions d'une algèbre $\mathbb{R}^n$-noethérienne vérifiant les conditions métriques pour la famille : $x \to c(1+ \mid x \mid)^{\alpha}$.

La méthode utilisée pour démontrer le résultat dans le cas analytique local [5] ne peut etre utilisée d'une maniére directe, les fonction f_i ne sont pas analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$. Un des outils clef est la notion de localisation analytique de l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ par un fermé irréductible $X \subset \Omega$ (cf 2); ceci nous a permis de construire un anneau qui a les même propriétés que l'anneau des séries convergentes et donc de traduire le théorème de division en terme de platitude suivant une idée de Malgrange.

2 algèbres analytiques Ω-noethériennes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; une sous algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ de l'algèbre des fonctions analytiques réelles dans Ω, $\mathcal{H}(\Omega)$, est analytique si $\mathbb{R}[x_1, \ldots , x_n] \subset \mathcal{O}(\Omega)$ et si $\mathcal{O}(\Omega)$ est stable par dérivation. Une algèbre analytique $\mathcal{O}(\Omega)$ est Ω -noethérienne si Ω muni de la topologie de $SM\mathcal{O}(\Omega)$ [spectre maximal de $\mathcal{O}(\Omega)$] est un espace noethérien noté $\Omega(\mathcal{O})$ [tout point $x \in \Omega$ est identifié à l'idéal maximal des fonctions de $\mathcal{O}(\Omega)$ qui s'annulent en x].

Si X est un fermé de $\Omega(\mathcal{O})$, on note $I(X)$ l'idéal de $\mathcal{O}(\Omega)$ formé des fonctions qui s'annulent sur X; si I est un idéal de $\mathcal{O}(\Omega)$ on note $V(I)$ l'ensemble des zéros de I dans Ω. Si $I = (\delta)\mathcal{O}(\Omega)$, on écrira $V(I) = V(\delta)$.

On va donner quelques notations et propriétés des algèbres Ω- noethériennes que nous allons utiliser par la suite; pour plus de détails on renvoie à [1].

Proposition 1. *Soit X un fermé de $\Omega(\mathcal{O})$ et soit k le plus grand entier tel qu'il existe $f_1, \ldots , f_k \in I(X)$ et un jacobien*

$$\Delta = \frac{D(f_1, \ldots , f_k)}{D(x_{i_1}, \ldots , x_{i_k})}$$

n'appartenant pas à $I(X)$. Alors $X - V(\Delta)$ est une sous variété analytique de codimension k et c'est une réunion de certaines composantes connexes de la variété

$$V = \{x \in \Omega \,/ f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0, \;\; \Delta(x) \neq 0\}$$

Preuve. Si $x \in X - V(\Delta)$, il suffit de montrer que le germe en x de $X - V(\Delta)$ est V_x; or si cela est faux, il existe $g \in I(X)$ et $g_{|V_x} \neq 0$; d'après le lemme ci dessous il existe un indice $i_h > i_k$ tel que

$$g_1 = \frac{D(f_1, \ldots, f_k, g)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_h})} \mid V_x$$

ait sa multiplicité strictement inférieure à celle de g. Par hypothèse $g_1 \in I(X)$ et $g_1 \mid V_x \neq 0$; on recommence avec g_1 et par itération, on obtient $f \in I(X)$ et $f(x) \neq 0$ ce qui est absurde.

Lemme 1. *Soit S un germe de variété analytique à l'origine de $\mathbb{R}^n$ défini par $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0$, $f_i \in \mathbb{R}\{x\}$ et*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}(0) \neq 0.$$

Soit $g \in \mathbb{R}\{x\}$ tel que $g_{|S} \neq 0$. Il existe $h > k$ tel que

$$\vartheta(g_{|S}) > \vartheta\left[\frac{D(f_1, \ldots, f_k, g)}{D(x_1, \ldots, x_k, x_h)}_{|S}\right];$$

(ϑ est la multiplicité à l'origine).

Preuve. On se ramène au cas trivial $f_1 = x_1, \ldots, f_k = x_k$ en utilisant l'isomorphisme $(x_1, \ldots, x_n) \to (f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Pour chaque fermé X de $\Omega(\mathcal{O})$, on désigne par $Reg_l X$ l'ensemble des points réguliers de codimension l de X; visiblement

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{\overline{Reg_l X}}$$

où $\overline{\overline{Reg_l X}}$ désigne l'adhérence de $Reg_l X$ dans $\Omega(\mathcal{O})$.

Si X est un fermé irréductible de $\Omega(\mathcal{O})$, l'entier k défini dans la proposition 1 est la $\mathcal{O}(\Omega)$-codimension de X; c'est l'unique entier k tel que $\overline{\overline{Reg_k X}} = X$. On dira par la suite que $f_1, \ldots, f_k$ de la proposition 1 forment un système de paramètres de X et on note $k = codim_{\mathcal{O}(\Omega)} X$. Cette codimension est en général strictement plus grande que la codimension géometrique de X.

Soit X un fermé irréductible de $\Omega(\mathcal{O})$ et soit $f = (f_1, \ldots, f_k)$ un système de paramétres de X ($k = codim_{\mathcal{O}(\Omega)} X$); on suppose que

$$\Delta = \frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$$

n'appartient pas à $I(X)$. Dans la suite on ecrira $\delta \geq \delta'$ si $\delta,\ \delta' \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$ et δ un multiple de δ' dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $\delta \geq \Delta$, $X - V(\delta)$ est une sous variété de codimension k . Nous dirons que $X - V(\delta)$ est une strate analytique de codimension k . Une stratification d'un constructible Y de $\Omega(\mathcal{O})$ est une partition $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$ de Y en strates analytiques telles que pour chaque $i = 1, \ldots, s$, $\Lambda_1 \bigcup \ldots \bigcup \Lambda_i$ est un fermé dans Y pour la topologie de Ω. Visiblement Y admet toujours une telle stratification.

Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ l'algèbre des fonctions g analytiques au voisinage de la strate $X - V(\delta)$ et telle qu'il existe α , $\beta \in \mathbb{N}$ et des $g_\omega \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{N}^n$, vérifiant

$$D^\omega g_{|X-V(\delta)} = \frac{g_\omega}{\delta^{\alpha|\omega|+\beta}} \mid X - V(\delta);$$

si $\delta \geq \delta'$ on a un homomorphisme de restriction: $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta'} \to \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$; on pose $\mathcal{O}(\Omega)_X = \lim\limits_{\delta} \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$. L'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)_X$ est le localisé analytique de $\mathcal{O}(\Omega)$ en X.

Il est facile de decrire ce localisé à l'aide d'un système de parametres $f_1, \ldots, f_k$ de X tel que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$$

n'appartient pas à $I(X)$.

Notons par $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,\delta,x'}$ la sous algèbre de $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ formée des $g \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ tel que $\forall \mu \in \mathbb{N}^k$

$$\frac{D^\mu g}{D(x'^\mu)} \mid X - V(\delta) = 0$$

òu $x' = (x_1, \ldots, x_k)$ et posons $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'} = \lim\limits_{\delta} \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,\delta,x'}$. Il est clair que $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}$ est un corps isomorphe au corps des fractions $\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)}{I(X)}\right]$ de $\frac{\mathcal{O}(\Omega)}{I(X)}$. On démontre le lemme suivant:

Lemme 2. ([1]) *Avec les notations prècédentes, l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ s'identifie à l'algèbre des séries*

$$g = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^k} g_\mu f^\mu,$$

$g_\mu \in \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,\delta,x'}$ et $f = (f_1, \ldots, f_k)$, qui convergent au voisinage de $X - V(\delta)$ dans Ω.

On note $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,\delta,x'}\{f_1, \ldots, f_k\}$ l'algèbre des séries precédentes; on pose

$$\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}\{f_1, \ldots, f_k\} = \lim_{\to\delta} \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,\delta,x'}\{f_1, \ldots, f_k\};$$

ce dernier anneau se comporte comme l'anneau des séries convergentes $\mathbb{R}\{x\}$: le théorème de préparation de Grauert-Hironaka est encore vrai d'ou l'on démontre que $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}\{f_1, \ldots, f_k\}$ est un anneau local régulier de dimension k; son idéal maximal est engendré par $f_1, \ldots, f_k$ et son corps résiduel s'identifie à $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'} = \left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)}{I(X)}\right]$; son complété s'identifie à l'anneau des séries formelles $\mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}[[f_1, \ldots, f_k]]$.

Soient N un sous module de $[\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta'}]^p$ et $\delta \geq \delta'$, on note par N^δ le sous module de $\mathcal{O}(\Omega)^p_{X,\delta}$ engendré par N. On pose $M = \dfrac{\mathcal{O}(\Omega)^p_X}{N}$; on démontre la proposition suivante:

Proposition 2. ([1]) *Il existe $\delta_1 \geq \delta'$ tel que pour tout $\delta \geq \delta_1$ on ait*

$$Tor_1^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(M \otimes_{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta'}} \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}\,,\ \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\right) = 0$$

Soit M un module de type fini sur $\mathcal{O}(\Omega)_X$; et soit $\mathcal{O}(\Omega)^q_X \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(\Omega)^p_X \to M \to 0$ une présentation finie de M; si ϕ a ses composantes dans $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ on note M^δ le conoyau de $\mathcal{O}(\Omega)^q_{X,\delta} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(\Omega)^p_{X,\delta}$. Bien entendu M^δ dépend de la représentation choisie, mais si $\tilde{M}^\delta$ est le module associé à une autre présentation, on a $\tilde{M}^\delta \simeq M^\delta$ pour δ assez grand. Un morphisme de $\mathcal{O}(\Omega)_X$-module $\phi : M \to M'$ induit, pour δ assez grand, un morphisme $\phi^\delta : M^\delta \to M'^\delta$. D'après la proposition 2, si $M' \to M \to M''$ est une suite éxacte de $\mathcal{O}(\Omega)_X$- modules de type fini; la suite $M'^\delta \to M^\delta \to M''^\delta$ est éxacte pour δ assez grand. On a la proposition:

Proposition 3. ([1]) *Soit M un module de type fini sur $\mathcal{O}(\Omega)_X$; si $\delta \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$ est assez grand, on a pour tout $x \in X - V(\delta)$:*

$$Tor_1^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(M^\delta, \mathcal{H}_x\right) = 0$$

3 Inégalités de Łojasiewicz globales

Les algèbres Ω-noethériennes vérifiant des inégalitées de Łojasiewicz globales sont introduites et étudiées dans [4]. On note par d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$; si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ on pose $\underline{d}(x, F) = inf(d(x, F), 1)$ et $\underline{d}(x, \emptyset) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne une sous algèbre de l'algèbre des fonctions analytiques sur Ω.

Soit Γ une famille non vide d'applications continues de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall x \in \Omega$, $\gamma(x) \geq \underline{d}(x, \partial\Omega)^{-1}$, i.e $\gamma(x) \geq 1$ et la boule euclidienne $B(x, \gamma(x)^{-1}) \subset \Omega$.

b) Si $\gamma \in \Gamma$ et $c \geq 1$ alors $c\gamma \in \Gamma$.

c) Si γ_1 , $\gamma_2 \in \Gamma$, alors $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma$.

d) Si $\gamma \in \Gamma$, il existe γ_1 , $\gamma_2 \in \Gamma$ tels que $\forall x \in \Omega$ et $\forall x' \in B(x, \gamma_1(x)^{-1})$, on ait $\gamma(x') \leq \gamma_2(x)$.

La famille de toutes les fonctions $x \to c\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$ avec $c \geq 1$ et $\alpha \geq 1$ vérifient les conditions ci dessus; de même que la famille $x \to c\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}(1+ \mid x \mid)^{\alpha}$ avec $c \geq 1$ et $\alpha \geq 1$. On dit que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une algèbre de type Γ si $\mathcal{O}(\Omega)$ est Ω-noethérienne et si $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ et une constante réelle $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$: $\gamma(x) \geq\mid f(x) \mid\geq \gamma(x)^{-1}\underline{d}(x, f^{-1}(0))^{\alpha}$ Dans la suite, $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne une algèbre de type Γ. Avec les notations de I.2 , on a :

Lemme 3. *Soit $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$; il existe $\alpha > 0$ tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe $\gamma_{1,m}$, $\gamma_{2,m} \in \Gamma$ vérifiant: $\forall a \in X - V(\delta)$, $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $\mid \omega \mid\leq m$ et $\forall c > 0$, $c \leq 1$, on ait:*

$$\mid D^{\omega}\phi(x) \mid\leq \gamma_{2,m}(a)\, \underline{d}(a, V(\delta))^{-\alpha|\omega|}$$

$\forall x \in B(a, c\gamma_{1,m}(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\delta))) \cap (X - V(\delta))$.

Preuve. Il existe $\phi_{\omega} \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{N}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que : $D^{\omega}\phi(x) = \dfrac{\phi_{\omega}(x)}{\delta^{\alpha|\omega|}(x)}$, $\forall x \in X - V(\delta)$. $\mathcal{O}(\Omega)$ étant de type Γ; il existe $\gamma_{\omega} \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que :

$$\mid \phi_{\omega}(x) \mid\leq \gamma_{\omega}(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall \omega \in \mathbb{N}^n$$

$$\gamma^{-1}(x)\underline{d}(x, V(\delta))^{\mu} \leq | \delta(x) | \leq \gamma(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ où } \mu > 0$$

Il existe $\gamma_{1,m}$, $\gamma'_{2,m} \in \Gamma$ tel que: $\forall x \in B(a, \gamma_{1,m}(a)^{-1})$ on a $\gamma(x) \leq \gamma'_{2,m}(a)$ et $\gamma_{\omega}(x) \leq \gamma'_{2,m}(a)$ $\forall a \in \Omega$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $| \omega | \leq m$. Soit $c > 0$, $c < 1$; pour tout $\omega \in \mathbb{N}^n$, $| \omega | \leq m$, on a:

$$| D^{\omega}\phi(x) | \leq \gamma'_{2,m}(a)^{\alpha|\omega|+1}\underline{d}(x, V(\delta))^{-\mu\alpha|\omega|}$$

$\forall x \in B(a, c\gamma_{1,m}(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\delta)))$. Si $x \in B(a, c\gamma_{1,m}(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\delta)))$, on a $(1-c)\underline{d}(a, V(\delta)) \leq \underline{d}(x, V(\delta))$. On pose

$$\gamma_{2,m} = \prod_{|\omega| \leq m} \frac{1}{(1-c)^{\alpha\mu|\omega|}} \gamma'^{\alpha|\omega|+1}_{2,m} \in \Gamma;$$

on en déduit le résultat car $\gamma'_{2,m}(a)^{\alpha|\omega|+1} \leq \gamma_{2,m}(a)$ pour tout $a \in \Omega$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $| \omega | \leq m$.

4 Théorème des fonctions implicites

Avec les notations de I.2; soient X un fermé irréductible de $\Omega(\mathcal{O})$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$ un système de parametres de X,

$$\Delta = \frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$$

n'appartenant pas à $I(X)$; on pose $\theta : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\theta(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

On aura besoin d'une version du théorème des fonctions implicites démontrée dans [3 ,ch3] dans la quelle nous allons préciser, en fonction des éléments de Γ, le diamètre des boules où θ induit un difféomorphisme. Ces boules sont, bien entendu, centrées en des points de $\Omega - V(\Delta)$.

Proposition 4. *Il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$, pour tout $\lambda_a > 0$, $\lambda_a \leq min(1, | \Delta(a) |)$ et pour tout $\mu > 0$, $\mu < 1$, l'application θ induit un difféomorphisme de $B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ sur son image et en outre:*

$$\theta(B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})) \supset B(\theta(a), \mu(\mu-1)\lambda_a\gamma(a)^{-2} | \Delta(a) |)$$

et $\forall x \in B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$:

$$| \Delta(x) | \geq (1-\mu) | \Delta(a) | .$$

Preuve. Pour chaque $a \in \Omega - V(\Delta)$, on pose $S_a = [d\theta(a)]^{-1}$, l'inverse de la différentielle de θ en a ; il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\forall a \in \Omega - V(\Delta)$ on ait:

$$\|S_a\| \leq \frac{\gamma_1(a)}{|\Delta(a)|}$$

Il existe $\gamma_2 \in \Gamma$, $\beta > 0$ tels que $\forall a \in \Omega$ on ait:

$$\gamma_2(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\Delta))^{\beta} \leq |\Delta(a)| \leq \gamma_2(a).$$

Pour chaque $a \in \Omega$, on pose $U_a = \theta - d\theta(a)$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma_3' \in \Gamma$ tel que pour tout $a \in \Omega$, toute boule euclidienne $B(a, r) \subset \Omega$ et tout $\zeta \in B(a, r)$ il existe $z \in B(a, r)$ tel que:

$$\|d\, U_a(\zeta)\| \leq \gamma_3'(z)\|\zeta - a\|$$

On prendra γ_3' tel que pour tout $x \in \Omega$ on ait:

$$\|d\theta(x)\| \leq \gamma_3'(x) \ \text{ et } \ \|d\Delta(x)\| \leq \gamma_3'(x).$$

D'apres la proprieté d) de 3; il existe γ_3, $\gamma_4 \in \Gamma$ tels que $\forall a \in \Omega$ et $\forall x \in B(a, \gamma_3(a)^{-1})$, on ait:

$$\gamma_3'(x) \leq \gamma_4(a) \ , \ \gamma_2(x) \leq \gamma_4(a) \ , \ \gamma_1(x) \leq \gamma_4(a)$$

On pose $\gamma = \prod_{i=1}^{4} \gamma_i \in \Gamma$ et soit $\mu > 0$, $\mu < 1$. On a:

$$B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}) \subset B(a, \gamma_3(a)^{-1}).$$

Pour chaque $a \in \Omega$ et chaque $x, x' \in B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ on a, d'après le théorème des accroissements finis:

$$\|U_a(x) - U_a(x')\| \leq \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}\gamma_4(a)\|x - x'\|$$

Or pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$, $\mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}\gamma_4(a)\frac{\gamma_1(a)}{|\Delta(a)|} < 1$; on en déduit, d'après [3,prop 6.1, chIII](où l'on a remplacé X (resp Y) par l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, d'origine a (resp d'origine $\theta(a)$); T par $d\theta(a)$; S par S_a; $\mathcal{U}$ par $B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}$; C par $\mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}\gamma_4(a)$; C' par $\frac{\gamma_1(a)}{|\Delta(a)|}$), que pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$, θ induit un homéomorphisme de $B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ sur son image. D'après la même proposition on a aussi:

$$\theta(B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})) \supset B(\theta(a), \frac{1 - CC'}{C'}\epsilon).$$

(on a remplacé X_0 par $B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$, ϵ par $\lambda_a\mu\gamma(a)^{-1}$). Or

$$\begin{aligned}\frac{1-CC'}{C'} &= (1 - \frac{\mu\lambda_a\gamma_3(a)^{-1}\gamma_2(a)^{-1}}{|\Delta(a)|})|\Delta(a)|\gamma_1(a)^{-1}\\ &\geq (1-\mu)|\Delta(a)|\gamma_1(a)^{-1},\end{aligned}$$

car $\lambda_a \leq |\Delta(a)|$. Donc on a:

$$\theta(B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})) \supset B(\theta(a), \mu(1-\mu)\lambda_a\gamma(a)^{-2}|\Delta(a)|).$$

Pour terminer la preuve de la proposition il reste à montrer que $\forall x \in B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ on a $|\Delta(x)| \geq (1-\mu)|\Delta(a)$; ceci prouvera que θ induit un difféomorphisme de $B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ sur son image pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$. Comme pour chaque $\xi \in B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$ on a $\|d\Delta(\xi)\| \leq \gamma_4(a)$ on en déduit alors, d'après le théorème des accroissements finis, que :

$$|\Delta(x) - \Delta(a)| \leq \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}\gamma_4(a) \leq \mu|\Delta(a)|$$

d'ou $|\Delta(x)| \geq (1-\mu)|\Delta(a)|$.

Remarque 1. 1) On pose :

$$\begin{aligned}W_{\theta(a)} &= B(\theta(a), \mu(1-\mu)\lambda_a\gamma(a)^{-2}|\Delta(a)|)\\ V_a &= \theta^{-1}(W_{\theta(a)}) \cap B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})\end{aligned}$$

Pour chaque $a \in \Omega - V(\Delta)$, $\theta_{|V_a} : V_a \to W_{\theta(a)}$ est un difféomorphisme de V_a sur $W_{\theta(a)}$.

2) Il existe $c > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma' \in \Gamma$ tels que si $\delta \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\delta \geq \Delta$, on ait, pour tout $a \in X - V(\delta)$:

$$B(a, c\lambda_a\gamma'(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\delta) \cup \partial\Omega)^{\beta}) \subset V_a.$$

En effet, pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$, on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$W_{\theta(a)} \supset \theta(B(a, \mu(1-\mu)\lambda_a\gamma(a)^{-3}|\Delta(a)|)$$

on a aussi l'inclusion:

$$B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1}) \supset B(a, \mu(1-\mu)\lambda_a\gamma(a)^{-3}|\Delta(a)|)$$

donc $B(a, \mu(1-\mu)\lambda_a\gamma(a)^{-3}|\Delta(a)|) \subset V_a$. On pose alors $c = \mu(1-\mu)$, et $\gamma' = \gamma^3\gamma_2$, on a $B(a, c\lambda_a\gamma'(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\Delta) \cup \partial\Omega)^{\beta}) \subset V_a$, d'ou le résultat car $V(\Delta) \subset V(\delta)$.

3) On donne ici quelques inégalités qu'on a obtenues et que nous allons utiliser par la suite. Pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$ et tout $x \in B(a, \mu\lambda_a\gamma(a)^{-1})$, on a:

$$\|d\Delta(x)\| \leq \gamma_4(a) \quad \|d\theta(x)\| \leq \gamma_4(a)$$

et

$$\|(d\theta(x))^{-1}\| \leq \frac{\gamma_4(a)}{|\Delta(a)|}(1-\mu)^{-1}$$

où $\gamma_4 \in \Gamma$.

5 Fonction différentiables au sens de Whitney.

Si $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $|\ k\ | = k_1 + \ldots + k_n$, $k! = k_1! \ldots k_n!$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$; $\mathbb{N}^n$ est muni de l'ordre partiel: $k \leq l \Longleftrightarrow k_j \leq l_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

5.1 Fonctions de Whitney de classe C^m

Si $m \in \mathbb{N}$ et si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}^m(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^m sur Ω. $\mathcal{E}^m(\Omega)$ est un espace de Fréchet; sa topologie est définie par la famille des semi-normes:

$$|f|_m^K = sup_{x \in K, |k| \leq m} |\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}(x)|$$

Soit X un fermé de Ω; un jet d'ordre m sur X est la donnée d'une suite de fonctions numériques continus, $F = (F^k)_{|k| \leq m}$, sur X. Soit $J^m(X)$ l'espace de tous les jets d'ordre m sur X muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel réel. On pose $|F|_m^K = sup_{x \in K, |k| \leq m} F^k(x)$ si $K \subset X$ est un compact et $F(x) = F^0(x)$, $x \in X$. Il existe une application linéaire $J^m : \mathcal{E}^m(\Omega) \to J^m(X)$ qui à f associe le jet $(\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}_{|K})_{|k| \leq m}$. Si $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \leq m$, on a une application linéaire $D^k : J^m(X) \to J^{m-|k|}(X)$ définie par $D^k F = (F^{l+k})_{|l| \leq m-|k|}$. On désigne aussi (sans risque de confusion) par D^k l'application de $\mathcal{E}^m(\Omega) \to \mathcal{E}^{m-|k|}(\Omega)$ donnée par $D^k f = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}$.

Si $a \in K$ et si $F \in J^m(K)$, on note $T_a^m F$ le polynôme de degré $\leq m$ défini par

$$x \to \sum_{|k|\leq m} \frac{F^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

et l'on pose: $R_a^m F = F - J^m(T_a^m F)$. Visiblement on a pour $|k| \leq m$:

$$(R_a^m)^k(x) = F^k(x) - \sum_{|l|\leq m-|k|} \frac{F^{k+l}(a)}{l!}(x-a)^l$$

On rappelle qu'un module de continuité est une fonction croissante, continue et concave $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\eta(0) = 0$.

On dit que $F \in J^m(X)$ est un jet de Whitney de classe C^m sur X si pour tout $k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq m$, $(R_x^m F)^k(y) = 0(|x-y|^{m-|k|})$ quand $|x-y| \to 0, x, y \in X$. D'après [3] ceci est équivaut à dire que pour tout compact $K \subset X$ il existe un module de continuité $\lambda\eta$ tel que , si $x, y \in K$ et $z \in \mathbb{R}^n$,

$$| T_x^m F(z) - T_y^m F(z) | \leq \eta(| x-y |)(| x-z |^m + | y-z |^m)$$

On désigne par $\mathcal{E}^m(X) \subset J^m(X)$ l'espace vectoriel réel des jets de Whitney de classe C^m sur X. $\mathcal{E}^m(X)$ est un espace de Fréchet lorsque l'on le munie de la famille des semi-normes:

$$\|F\|_m^K = | F |_m^K + Sup_{x,y\in K, x\neq y |k|\leq m} \frac{| (R_x^m F)(y) |}{| (x-y) |^{m-|k|}}$$

Lorsque X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les jets de Whitney de classe C^m et les fonctions de classe C^m sur X coincident. Les topologies définies par $||_m^K$ et $\| \|_m^K$ sont équivalentes.

Théorème 1. ([3]) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X \subset \Omega$ un fermé; il existe un opérateur lineaire continu $W : \mathcal{E}^m(X) \to \mathcal{E}^m(\Omega)$ tel que pour tout $F \in \mathcal{E}^m(X)$ et tout $x \in X$, $D^k(WF)(x) = F^k(x)$ si $|k| \leq m$ et telle que la restriction de $W(F)$ à $\Omega - X$ est indéfiniment dérivable.*

Si $K \subset X$ est un compact et B une boule fermée contenue dans Ω telle que $K \subset B$, on pose $\lambda = sup_{x\in B} d(x, K)$, d'après [3] on a:

Proposition 5. *Si $F \in \mathcal{E}^m(K)$ il existe $C[\lambda] \in \mathbb{R}[\lambda]$ à coéfficients positifs tel que:*

$$|W(F)|_m^B \leq C[\lambda].\|F\|_m^K$$

5.2 Fonctions de Whitney de classe C^∞

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{E}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ sur Ω. $\mathcal{E}(\Omega)$ est un Fréchet, sa topologie est définie par la famille de semi-normes $||_m^K$, $K \subset \Omega$ compact, $m \in \mathbb{N}$.

Soit $\pi_{m+1,m} : J^{m+1}(X) \to J^m(X)$ la projection qui à $(F^k)_{|k|\leq m+1}$ associe $(F^k)_{|k|\leq m}$. Visiblement $\pi_{m+1,m}(\mathcal{E}^{m+1}(X)) \subset \mathcal{E}^m(X)$; la limite projective

$$J(X) = \lim_{\longleftarrow} J^m(X)$$

est l'espace des jets d'ordre infini sur X. La limite projective $\mathcal{E}(X) = \lim\limits_{\longleftarrow}\mathcal{E}^m(X)$ s'identifie à un sous espace de $J(X)$. Un élément $F \in \mathcal{E}(X)$ est un jet de Whitney de classe C^∞ sur X. $\mathcal{E}(X)$ est un espace de Fréchet lorsque l'on le munie de la topologie définie par la famille de semi-normes $\|\|_m^K$ où $m \in \mathbb{N}$, $K \subset X$ un compact.

Soit $F \in J(X)$; alors $F \in \mathcal{E}(X)$ si et seulement si, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\pi_m F \in \mathcal{E}^m(X)$ où $\pi_m : J(X) \to J^m(X)$ désigne la projection canonique.

Par passage à la limite projective sur les applications $J^m : \mathcal{E}^m(\Omega) \to J^m(X)$ on obtient une application lineaire $J : \mathcal{E}(\Omega) \to J(X)$. Le théorème 1 entraine que $\mathcal{E}^m(X) = J^m(\mathcal{E}^m(\Omega))$; on a aussi:

Théorème 2. ([3]) $\mathcal{E}(X) = J(\mathcal{E}(\Omega))$

Remarque 2. Ni $\mathcal{E}^m(X)$ ni $\mathcal{E}(X)$ n'est en général complet pour la famille des semi- normes $||_m^K$. Soit $p \in \mathbb{N}$; un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit $p-$régulier s'il est connexe par arcs rectifiables et s'il existe $c > O$ tel que $\delta(x, y) \leq c|x-y|^{\frac{1}{p}}$ pour tout x , $y \in K$ (δ désigne la distance géodisique sur K). Si K est régulier, alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que $\|F\|_m^K \leq C_m|F|_{mp}^K$ pour tout $F \in \mathcal{E}^{mp}(K)$ [3]. Si K est 1-régulier, alors les normes $||_m^K$ et $\|\|_m^K$ sont équivalentes sur $\mathcal{E}^m(K)$.

Soit $Y \subset X \subset \Omega$ un fermé, $\mathcal{E}(X, Y)$ désigne l'espace des jets de Whitney de classe C^∞, $F = (F^k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ tels que $F^k_{|Y} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^n$.

A partir de maintenant on suppose que l'ouvert Ω est borné et que l'algébre $\mathcal{O}(\Omega)$ vérifie la condition métrique pour la famille Γ des fonctions: $x \to c\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\nu}, c \geq 1\,,\ \nu \geq 1$.

Avec les notations de I.2 et 4; soient $\Lambda = X - V(\delta)$, une strate analytique de codimension k, Y un fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant $V(\delta) \cup \partial\Omega$, $Y \subset \overline{\Omega}$. Comme Λ est fermée dans $\Omega_1 = \mathbb{R}^n - Y$, par le théorème 1 tout $\varphi \in \mathcal{E}^m(\Lambda)$ se prolonge en une fonction de classe C^m sur Ω_1. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $W^m(\Lambda, Y)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{E}^m(\Lambda)$ formé des $\psi \in \mathcal{E}^m(\Lambda)$ tels qu'il existe $c > 0$, $\nu \geq 1$ vérifiant: $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que:

$$| \psi |_m^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} \leq C_p \underline{d}(a, Y)^p \ \ \forall a \in \Lambda$$

$B_{a,c,\nu} = B(a, c\underline{d}(a, Y)^\nu)$

Visiblement $\pi_{m,m+1}(\mathcal{W}^{m+1}(\Lambda, Y)) \subset \mathcal{W}^m(\Lambda, Y)$ et donc la limite projective $\mathcal{W}(\Lambda, Y) = \lim \mathcal{W}^m(\Lambda, Y)$ s'identifie à un sous espace de $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Lemme 4. *Soit $\psi \in W^m(\Lambda, Y)$, il existe $c > 0$, $\nu \geq 1$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ il existe $C_p > 0$ avec: $\forall a \in \Lambda$, on ait:*

$$\|\psi\|_m^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} \leq C_p \underline{d}(a, Y)^p.$$

Preuve. Par hypothèse il existe $c_1 > 0$, $s_1 \geq 1$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ il existe $C'_p > 0$ avec:

$$| \psi |_m^{B_{a,c_1,s_1}\cap\Lambda} \leq C'_p \underline{d}(a, Y)^p \ \ \forall a \in \Lambda$$

Il existe aussi $c_2 > 0$, $c_2 \leq 1$, $\nu_2 \geq 1$, $\beta > 0$, tels que pour tout $x \in \Omega$:

$$|\Delta(x)| \geq c_2\underline{d}(x, \partial\Omega)^{\nu_2}\underline{d}(x, V(\Delta))^\beta \geq c_2\underline{d}(x, V(\Delta) \cup \partial\Omega)^{\nu_2+\beta}.$$

On pose $c_3 = min(c_1, c_2)$, $s_2 = max(s_1, \nu_2 + \beta)$ et $\lambda_a = c_3\underline{d}(a, Y)^{s_2}$; comme pour chaque $a \in X - V(\delta)$, $\lambda_a \leq min(1, |\Delta(a)|)$; d'après la proposition 4 il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que pour tout $a \in \Omega - V(\Delta)$ et tout $\mu > 0$, $\mu < 1$, θ induit un difféomorphisme de $B(a, \mu\gamma(a)^{-1}c_3\underline{d}(a, Y)^{s_2})$ sur son image. De plus si V_a et $W_{\theta(a)}$ sont comme dans 1) de la remarque 1; $\theta : V_a \to W_{\theta(a)}$ est un difféomorphisme.

Par construction $V_a \subset B(a, \mu c_2\underline{d}(a, Y)^{s_3}) \subset B_{a,c_1,s_1}$. D'après la remarque 1.2), il existe $c > 0$, $\nu \geq 1$ tel que pour tout $a \in X - V(\delta)$:

$$B(a, c\underline{d}(a, Y)^\nu) \subset V_a \subset B_{a,c_1,s_1}.$$

Nous allons maintenant comparer, pour chaque $a \in X - V(\delta)$, $\|\psi\|_m^{V_a\cap\Lambda}$ et $|\psi|_m^{V_a\cap\Lambda}$.

D'après la proposition 1, $\Lambda = X - V(\delta)$ est une réunion de certaines composantes connexes de $M = \{x \in \Omega / f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0, \delta(x) \neq 0\}$. $W_{\theta(a)}$ étant une boule euclidienne, donc $V_a \cap M$ est connexe car $\theta(V_a \cap M) = W_{\theta(a)} \cap \mathbb{R}^{n-k}$ ($\theta : V_a \to W_{\theta(a)}$ est un difféomorphisme). Comme $V_a \cap \Lambda$ est ouvert et fermé dans $V_a \cap M$, on en déduit que $V_a \cap M = V_a \cap \Lambda$.

Si $x, y \in V_a \cap \Lambda$, le segment $[\theta(x), \theta(y)] = \{(1-t)\theta(x) + t\theta(y) \ / t \in [0, 1]\}$ est contenu dans $W_{\theta(a)} \cap \mathbb{R}^{n-k}$; on désigne par σ_{xy} l'image de $[\theta(x), \theta(y)]$ par θ^{-1}. Alors σ_{xy} est un arc de courbe rectifiable joignant x et y; de plus $\sigma_{xy} \subset V_a \cap \Lambda$. Si $|\sigma_{xy}|$ désigne la longueur de σ_{xy}, on a:

$$|\sigma_{xy}| \leq n \, sup_{\xi'} \|d\theta(\xi')\| . sup_{\xi} \|(d\theta(\xi))^{-1}\| \, |x - y|$$

$\xi', \xi \in B(a, \mu\lambda_a \gamma(a)^{-1})$.

D'après 3) de la remarque 1 , on a:

$$|\sigma_{xy}| \leq \frac{n}{1-\mu} \frac{\gamma_4(a)^2}{|\Delta(a)|} \|x - y\| \leq \frac{n}{1-\mu} \gamma_4(a)^2 \gamma_2(a) \underline{d}(a, V(\Delta))^{-\beta} \|x - y\|$$

Or $\gamma_i(a) = c_i \underline{d}(a, \partial\Omega)^{-\nu_i}$, $c_i \geq 1$, $\nu_i \geq 1$ et $i = 2, 4$.

$$|\sigma_{xy}| \leq \frac{n}{1-\mu} c_4^2 c_2 \underline{d}(a, Y)^{-\nu_2 - \nu_4 - \beta} |x - y|.$$

D'apres [3], pour tout $x, y \in V_a \cap \Lambda$, et tout $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \leq m$, on a:

$$|(R_x^m \psi)^k(y)| \leq 2n^{\frac{m-|k|}{2}} |\sigma_{xy}|^{m-|k|} |\psi|_m^{V_a \cap \Lambda}.$$

En posant $s = \nu_2 + \nu_4 + \beta$, $A = 2n^{\frac{m}{2}} (\frac{n}{1-\mu} c_4^2 c_2)^m$, on a, pour tout $x, y \in V_a \cap \Lambda$,

$$|(R_x^m \psi)^k(y)| \leq A \, \underline{d}(a, Y)^{-s(m-|k|)} |\psi|_m^{V_a \cap \Lambda} |x - y|^{m-|k|}$$

Puisque $\psi \in \mathcal{W}^m(\Lambda, Y)$, pour $p \in \mathbb{N}$ il existe $C_p > 0$ tel que:

$$|\psi|_m^{V_a \cap \Lambda} \leq C_p \underline{d}(a, Y)^{p+sm}$$

On en déduit alors que $\|\psi\|_m^{V_a \cap \Lambda} \leq C_p A \, \underline{d}(a, Y)^p$ d'ou le lemme, car $B_{a,c,\nu} \subset V_a$.

Proposition 6. *Soit* $\psi \in W(\Lambda, Y)$; *alors* ψ *se prolonge en un élément de* $\mathcal{E}(\Lambda \cup Y, Y)$

Preuve. On gardera les notations de la preuve du lemme 4 et on suit les idées de [3, ch V ,5.5]. On considère ψ comme élément de $J(\Lambda \cup Y)$ en la prolongeant par 0 sur Y; on doit montrer que $\psi \in \mathcal{E}(\Lambda \cup Y, Y)$. Si $m \in \mathbb{N}$ fixé soit K compact de $\mathbb{R}^n$, on doit montrer qu'il existe η module de continuité tel que $\forall a$, $b \in K \cap (\Lambda \cup Y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on ait:

$$| T_a^m \psi(x) - T_b^m \psi(x) | \leq (| a - x |^m + | b - x |^m)\eta(| a - b |)$$

On distinguera trois cas. Dans chacun d'eux, on peut déterminer un tel module de continuité:

1. $a, b \in K \cap \Lambda$ et $d(a, b) \leq c\underline{d}(a, Y)^\nu$, (notation de la preuve du lemme 4) donc $b \in V_a$. D'après le théorème 1 il existe $\psi_a \in \mathcal{E}^{m+1}(B_{a,c,\nu})$ telle que $J^{m+1}\psi_{a|B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} = \pi_{m+1}\psi_{|B_{a,c,\nu}\cap\Lambda}$ et il existe $P(\lambda) \in \mathbb{R}_+[\lambda]$ tel que

$$|\psi_a|_{m+1}^{B_{a,C,\nu}} \leq P(\lambda)\|\psi\|_{m+1}^{B_{a,C,\nu}\cap\Lambda}, \quad \lambda = \underline{d}(a, Y),$$

ceci est d'après la proposition 5. En appliquant la formule de Taylor à la fonction ψ_a, il existe $H > 0$ tel que:

$$| T_a^m \psi(x) - T_b^m \psi(x) | \leq H(| a - x |^m + | b - x |^m) \mid a - b \mid| \psi_a |_{m+1}^{B_{a,c,\nu}}$$

D'après le lemme 4, le fait que $\psi \in \mathcal{W}(\Lambda, Y)$ et l'inégalité ci dessus on voit alors que $|\psi_a |_{m+1}^{B_{a,c,\nu}}$ est borné lorsque $a \in K \cap \Lambda$.

2. a , $b \in K \cap \Lambda$ et $d(a, b) \geq c\underline{d}(a, Y)^\nu$; il existe $c' > 0$ tel que $d(a, b) \geq c'\underline{d}(b, Y)^\nu$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe une constante $H_p > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} | T_a^m \psi(x) - T_b^m \psi(x) | &\leq | T_a^m \psi(x) | + | T_a^m \psi(x) | \\ &\leq H_p[sup(\frac{1}{c}, \frac{1}{c'})]^{\frac{p}{\nu}} \mid a - b |^{\frac{p}{\nu}} (2+ | x - a |^m + | x - b |^m). \end{aligned}$$

On prend $p > \nu(m + 1)$.

3. Si a ou $b \in K \cap Y$, l'un des termes de la différence $| T_a^m \psi(x) - T_b^m \psi(x) |$ est nul et on majore l'autre comme en 2).

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant:

Lemme 5. *Soient $Y \subset \overline{\Omega}$ un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que , $\partial\Omega \subset Y$ et $\phi \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, Y)$. Pour tout $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, il existe $C_{m,p} > 0$ tels que*

$$| \phi |_m^{B_a} \leq C_{m,p,K} d(a, Y)^p \ , \ \forall a \in \Omega \text{ où } B_a = B(a, \underline{d}(a, Y))$$

Preuve. D'après le théorème 2, φ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, plate sur Y, qu'on notera encore φ. Si $x \in \Omega$, il existe $y_x \in Y$ tel que $d(x, Y) = |x - y_x|$; en appliquant la formule de Taylor au point y_x; pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C' > 0$ (indépendante de φ) telle que, $\forall x \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \leq s$:

$$|D^k \varphi(x)| \leq C' |\varphi|_s^{\bar{\Omega}} d(x, Y)^{s-|k|}.$$

Pour chaque $x \in B_a = B(a, \underline{d}(a, Y))$, $d(x, Y) \leq 2d(a, Y)$. Il existe $r \geq 1$ tel que $\forall x \in B_a$, $d(x, Y) \leq 2r\underline{d}(a, Y)$. Si $s = m + p$ on a:

$$|\varphi|_m^{B_a} \leq C' |\varphi|_{m+p}^{\bar{\Omega}} \underline{d}(a, Y)^p \quad \forall a \in \Omega$$

D'ou le résultat.

$\Lambda = X - V(\delta)$ étant toujours une strate analytique; Soient $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$, $\psi \in W(\Lambda, Y)$. $\Lambda = X - V(\delta)$ étant fermé dans $\Omega_1 = \Omega - V(\delta)$; d'apres le théorème 2, il existe $\tilde{\phi} \in \mathcal{E}(\Omega_1)$ tel que $D^\omega \tilde{\phi}_{|\Lambda} = D^\omega \phi_{|\Lambda}$ $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$; de même ψ se prolonge en une fonction $\tilde{\psi} \in \mathcal{E}(\Omega_1)$. La fonction $\tilde{\phi}\tilde{\psi}$ induit sur Λ un jet de Whitney qu'on notera par la suite $\phi\psi = (D^\omega(\tilde{\phi}\tilde{\psi})_{|\Lambda})_\omega$.

Proposition 7. *Soient $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$, $\psi \in W(\Lambda, Y)$. Alors $\phi\psi \in W(\Lambda, Y)$; ainsi $W(\Lambda, Y)$ est un $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$ module.*

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$; d'après le lemme 3, il existe:

$$\gamma_i(x) = c_i \underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\nu_i} , \ i = 1, 2 , \ c_i \geq 1 , \ \nu_i \geq 1$$

tels que $\forall c > 0$, $c < 1$, $\forall a \in X - V(\delta)$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $|\omega| \leq m$ on ait:

$$|D^\omega \varphi(x)| \leq c_2 \underline{d}(a, \partial\Omega)^{-\nu_2} \underline{d}(a, V(\delta))^{-\alpha|\omega|} \leq c_2 \underline{d}(a, Y)^{-\alpha|\omega| - \nu_2}$$

$\forall x \in B(a, c\gamma_1(a)^{-1}\underline{d}(a, V(\delta))) \cap X - V(\delta)$. Puisque $\psi \in W(\Lambda, Y)$; il existe $c' > 0$, $\mu' \geq 1$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$ il existe $C_p > 0$ avec:

$$|\psi|_m^{B_a \cap \Lambda} \leq C_p \, \underline{d}(a, Y)^{p + \alpha m + \nu_2}$$

où $B_a = B(a, c' \underline{d}(a, Y)^{\mu'})$.

Visiblement

$$B(a, cc_1^{-1} \underline{d}(a, Y)^{\nu_1 + 1}) \subset B(a, c\gamma_1(a)^{-1} \underline{d}(a, V(\delta))).$$

On pose $c_2 = min(c', cc_1^{-1})$, $\mu = max(\mu', \nu_1+1)$ et $B_{a,c_2,\mu} = B(a, c_2\underline{d}(a, Y)^{\mu})$. Il est clair que:

$$|\phi\psi|_m^{B_{a,c_2,\mu}\cap\Lambda} \leq C'_p \underline{d}(a, Y)^p$$

où C'_p est une constante positive.

6 Théorème de division

On rappelle que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une algèbre de type Γ où Γ est la famille des fonctions: $C\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $C \geq 1$ et que Ω est un ouvert borné.

Théorème 3. *Soient* $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{O}(\Omega)^p$*; pour tout* $\phi \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, \partial\Omega)^p$ *qui appartient ponctuellement sur* Ω *au sous module de* $J(\Omega)^p$ *engendré par les* g_j , $j = 1, \ldots, q$*; il existe* $\alpha_j \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, \partial\Omega)$ *tel que:*

$$\phi = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j g_j \quad sur \ \Omega$$

Remarque 3. **1)** La condition d'appartenence ponctuelle signifie qu'il existe $\beta_j \in J(\Omega)$ tels que

$$\phi = \sum_{j=1}^{q} \beta_j g_j.$$

2) Le théorème 3 est une conséquence du théorème suivant:

Théorème 4. *Soit* M *un* $\mathcal{O}(\Omega)_X$*-module de type fini,*

$$M = \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X^p}{N}$$

avec N *un sous module de* $\mathcal{O}(\Omega)_X^p$ *engendré par* $g_1, \ldots, g_q$. *On suppose que* $g_i \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta_0}$, $\forall i \in \{1, \ldots, q\}$, $\delta_0 \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$. *Il existe* $\delta' \geq \delta_0$ *tel que pour tout* $\delta \geq \delta'$, *si* $\Lambda = X - V(\delta)$, *on ait:*

$$Tor_1^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(M^{\delta}, \frac{J(\Lambda)}{W(\Lambda, Y)}\right) = 0$$

Remarque 4. **1)** Y est fermé vérifiant : $\overline{\Omega} \supset Y \supset V(\delta) \cup \partial\Omega$. la notation M^{δ} est celle de I.2; $W(\Lambda, Y)$ est un $\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}$-module d'apres la proposition 7.

2) La conclusion du théorème 4 est équivalente à la conjonction des deux conditions suivantes

$$i)\ Tor_1^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\big(M^\delta\ ,\ J(\Lambda)\big) = 0$$
$$ii)\ NJ(\Lambda) \cap W(\Lambda\ ,\ Y)^p = NW(\Lambda, Y).$$

La condition $i)$ signifie que

$$\mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, J(\Lambda)) = \mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}).J(\Lambda).$$

$\mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, A) =$ le module des relations entre $g_1, \dots, g_q$à coefficients dans un anneau A.

On a

$$\mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, J(\Lambda)) = \prod_{x\in\Lambda} \mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{F}_x) = \prod_{x\in\Lambda} \mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{H}_x)\mathcal{F}_x.$$

D'apres la proposition 3; on a

$$\mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{H}_x) = \mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}).\mathcal{H}_x$$

donc $\mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, J(\Lambda)) = \mathcal{R}(g_1, \dots, g_q, \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}).J(\Lambda)$. Ainsi donc la conclusion du théorème 4 est équivaut à $ii)$.

On va maintenant montrer comment le théorème 4 implique le théorème 3. Avec les notations et hypothèses ci dessus ; on pose $N = (g_1, \dots, g_q)\mathcal{O}(\Omega)^p$. Soit X_i un fermé irréductible de Ω; on pose $N_i = N\mathcal{O}(\Omega)_{X_i}$ et $M_i = \frac{\mathcal{O}(\Omega)^p_{X_i}}{N_i}$. On applique le théorème 4 à M_i; il existe $\delta_i \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X_i)$ tel que pour tout $\delta \geq \delta_i$, M^{δ_i} vérifie la conclusion du théorème 4. On pose $\Lambda_i = X_i - V(\delta_i)$; $\Omega = X_1 \cup \dots \cup X_s$, X_i fermé irréductible. Pour chaque fermé X_i on applique les considérations ci dessus. On décompose le fermé $\cup_{i=1}^s V(\delta_i)$ en fermés irréductibles, et on refait la même chose. $\Omega(\mathcal{O})$ étant un espace noethérien, le dévissage s'arrête et on obtient alors une partition de Ω en strates analytiques $\Lambda_k = X_k - V(\delta_k)$, $k = 1, \dots, N$, telle que sur chaque strate Λ_k on a la conclusion du théorème 4 pour

$$M_k = \frac{\mathcal{O}(\Omega)^p_{X_k}}{N\mathcal{O}(\Omega)_{X_k}}.$$

On peut numéroter les Λ_k de telle manière que $V(\delta_k) \subset \cup_{j<k}\Lambda_j$. On va montrer, par récurrence sur $k = 1, \ldots, N+1$, que si $\phi \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, \partial\Omega)^p$, appartient ponctuellement sur Ω à $g_1, \ldots, g_q$; alors $\phi = \phi_k \, mod \, \big((g_1, \ldots, g_q)\mathcal{E}(\overline{\Omega}, \partial\Omega)\big)$ où $\phi_k \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, \cup_{j<k}\Lambda_j \cup \partial\Omega)^p$.

Le résultat est trivial pour $k = 1$: on prend $\phi_1 = \phi$. Supposons que $\phi = \phi_k \, mod \, \big((g_1, \ldots, g_q)\mathcal{E}(\overline{\Omega}, \partial\Omega)\big)$ avec $\phi_k \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, \cup_{j<k}\Lambda_j \cup \partial\Omega)^p$. On pose $Y = \cup_{j<k}\Lambda_j \cup \partial\Omega$. D'apres le lemme 5, $\phi_k \in W(\Lambda_k, Y)^p$ de plus $\phi_k \in NJ(\Lambda_k)$ car $\phi \in NJ(\Omega)$. Donc $\phi_k \in W(\Lambda_k, Y)^p \cap NJ(\Lambda_k)$; puisque M_k vérifie la conclusion du théorème 4 et d'apres la remarque 4 on a $\phi_k \in NW(\Lambda_k, Y)$ i.e il existe $\alpha_{jk} \in W(\Lambda_k, Y)$ $j = 1, \ldots, q$, tel que $\phi_k = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{jk} g_j$ sur Λ_k. D'apres la proposition 6 on peut prolonger α_{jk} en $\overline{\alpha_{jk}} \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}, Y)$. On considère

$$\phi_{k+1} = \phi_k - \sum_{j=1}^{q} \overline{\alpha_{jk}} g_j;$$

ϕ_{k+1} vérifie la propriété à l'ordre $k+1$. A l'ordre $N+1$, on a le théorème.

7 Réduction au cas d'un système de paramètres

Pour démontrer le théorème 4 nous suivons les idées de [5] . Utilisant les propriétés algébriques de l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)_X$ nous réduisons le problème au cas où les $g_1, \ldots, g_q$ font parties d'un système de paramètres de $\mathcal{O}(\Omega)_X$. On reprend les notations du paragraphe 1. Soit $\wp$ un idéal premier de hauteur s de $\mathcal{O}(\Omega)_X$; si $\delta \geq \Delta$; la strate analytique $\Lambda = X - V(\delta)$ sera notée Λ_δ. On pose $\frac{J(\Lambda_\delta)}{W(\Lambda_\delta, Y)} = \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)$ où Y est un fermé tel que $\overline{\Omega} \supset Y \supset V(\delta) \cup \partial\Omega$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, on considère la condition C_m suivante:

Il existe $\{P_1, \ldots, P_s\} \subset \wp$ une $\mathcal{O}(\Omega)_X$- suite telle que si $P_1, \ldots, P_s \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta_0}$; il existe $\delta' \geq \delta_0$ avec:

$$Tor_m^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) = 0 \;\; \forall \delta \geq \delta'$$

On remarquera que la condition (C_1) implique (C_m) $\forall m \geq 1$; ceci se vérifie par récurrence sur s. En effet le résultat est vraie pour $s = 0$. Si $s > 0$ on pose $P' = (P_1, \ldots, P_{s-1})$; de la suite exacte:

$$0 \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{P'\mathcal{O}(\Omega)_X} \xrightarrow{P_s} \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{P'\mathcal{O}(\Omega)_X} \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{P\mathcal{O}(\Omega)_X} \to 0$$

[où P_s est la multiplication par P_s, on pose $P = (P', P_s)$] il existe $\delta' \geq \delta_0$ tel que pour tout $\delta \geq \delta'$ on ait une suite exacte: (cf proposition 2)

$$0 \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P'\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}} \xrightarrow{P_s} \frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P'\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}} \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}} \to 0$$

d'ou la suite exacte des "Tor":

$$\cdots \to Tor_{m+1}^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P'\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right] \to Tor_{m+1}^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right] \to$$

$$\to Tor_{m}^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P'\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right] \to \cdots$$

D'apres l'hypothèse de récurrence le premier et le troisième "Tor" sont nuls, donc $\forall m \geq 2$

$$Tor_{m}^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{P\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right] = 0$$

Comme le résultat est vrai pour $m = 1$(condition C_1); on a alors $(C_1) \Rightarrow (C_m)$ $\forall m \geq 1$.

Lemme 6. *La conclusion du théorème est vérifiée si tout idéal premier $\wp$ de $\mathcal{O}(\Omega)_X$ vérifie la condition (C_1).*

Preuve. On garde les notations de l'enoncé du théorème 4; $\mathcal{O}(\Omega)_X$ est un anneau local régulier de dimension k; M un $\mathcal{O}(\Omega)_X$- module de type fini; donc la dimension homologique de M est inférieur où égale à k. On en déduit alors que pour tout $s \geq k+1$, $s \in \mathbb{N}$:

$$Tor_s^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}(M^\delta, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y) = 0$$

pour tout δ assez grand.

On va montrer par récurrence descendante sur $m = 1, 2, \ldots, k, k+1$, qu'il existe $\delta' \geq \delta_0$ tel que pour tout $\delta \geq \delta'$ on ait :

$$Tor_m^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(M^\delta, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) = 0$$

Supposons que cela est vrai pour $m+1$; on va le montrer pour m.

Il existe, $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$, une suite croissante de sous modules de M telle que $\dfrac{M_{j+1}}{M_j} \tilde{\to} \dfrac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{\wp_j}$ où $\wp_j$ est un idéal premier de $\mathcal{O}(\Omega)_X$.

D'apres la proposition 2 et la suite exacte des "Tor" on peut supposer que

$$M = \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{\wp}$$

où $\wp$ est un idéal premier de $\mathcal{O}(\Omega)_X$ de hauteur s.

Soit $\{P_1, \ldots, P_s\} \subset \mathcal{O}(\Omega)_X$ une $\mathcal{O}(\Omega)_X$- suite et soit $\delta_0 \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$ avec $P_i \in \mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta_0}$, $\forall i = 1, \ldots, s$. $\wp$ étant un idéal premier associé à

$$\frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_X},$$

donc $\frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_X}$ contient un sous module isomorphe à $\frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{\wp}$; il existe alors une suite exacte:

$$0 \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{\wp} \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_X}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_X} \to T \to 0$$

où T est un $\mathcal{O}(\Omega)_X$- module de type fini. Il existe $\delta' \geq \delta_0$ tel que pour tout $\delta \geq \delta'$ on ait une suite exacte:

$$0 \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{\wp^\delta} \to \frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}} \to T^\delta \to 0$$

d'ou une suite exacte des "Tor":

$$\cdots \to Tor_{m+1}^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(T^\delta, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) \to Tor_m^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{\wp^\delta}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) \to$$

$$Tor_m^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) \to \cdots$$

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée T^δ, le premier "Tor" est nul; $\wp \subset \mathcal{O}(\Omega)_X$ vérifie (C_1) donc, $\forall i \geq 1$, $\wp$ vérifie (C_i) d'ou:

$$Tor_i^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left(\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right) = 0 \;\; \forall i \geq 1$$

d'ou le lemme. En résumé, la preuve du théorème de division est ramenée à montrer que tout idéal premier $\wp$ de $\mathcal{O}(\Omega)_X$ vérifie la condition (C_1).

7.1 Division par un système de paramètres.

On reprend les notations de I.2; soit $\wp$ un idéal premier de hauteur s de $\mathcal{O}(\Omega)_X = \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}\{f_1, \ldots, f_k\}$; procédent comme dans le cas analytique local; il existe pour chaque, $j = 1, \ldots, s$, un polynôme distingué de degré p_j, $P_j \in \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}\{f_1, \ldots, f_{k-s}\}[f_{k-s+j}]$ tels que : $(P_1, \ldots, P_s) \subset \wp$ et $(P_1, \ldots, P_s)$ est une $\mathcal{O}(\Omega)_X$- suite.

Soit $\delta \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$, $\delta \geq \Delta$, tel que $P_j \in \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x',\delta}\{f_1, \ldots, f_{k-s}\}[f_{k-s+j}]$; il reste à voir que:

$$Tor_1^{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}\left[\frac{\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}{(P_1, \ldots, P_s)\mathcal{O}(\Omega)_{X,\delta}}, \tilde{\mathcal{F}}(\Lambda_\delta, Y)\right] = 0$$

où ce qui est équivalent, d'apres la remarque 4, à :

$$(P_1, \ldots, P_s)J(\Lambda_\delta) \cap W(\Lambda_\delta, Y) = (P_1, \ldots, P_s)W(\Lambda_\delta, Y)$$

La démonstration de ce dernier résultat nécessite quelques lemmes.

7.2 Division par le polynôme générique.

Soit

$$Q = t^q + \sum_{i=1}^{q} \xi_i t^{q-i},$$

avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbb{R}^q$, le polynôme générique; si W est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$; on pose

$$V = \{(x', v, t) \in W \ / \frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(x', v, t) = 0 \ \forall i = 0, \ldots, q-1\}.$$

V est fermé. On pose $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q$ la projection évidente; on a:

Proposition 8. ([2]) *Soit K un compact de V , $K' = \pi(K)$. Alors l'application de $\mathcal{E}(K) \times \mathcal{E}(K')^q \to \mathcal{E}(K)$ qui à $(\psi, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ fait correspondre*

$$Q\psi + \sum_{i=1}^{q} \xi_i t^{q-1}$$

est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Soit $P \in \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x'}\{f_1, \dots, f_{k-1}\}[f_k]$ un polynôme distingué de degré q:

$$P = f_k^q + \sum_{i=1}^{q} \beta_i f_k^{q-1};$$

il existe $\delta \in \mathcal{O}(\Omega) - I(X)$, $\delta \geq \Delta$, tel que $P \in \mathcal{O}(\Omega)^{(0)}_{X,x',\delta}\{f_1, \dots, f_{k-1}\}[f_k]$. On pose $\Lambda = X - V(\delta)$; pour chaque $a \in \Lambda$, $(f_1, \dots, f_k, x_{k+1} - a_{k+1}, \dots, x_n - a_n)$ forment un système de coordonnées locales en a. On note par $\mathcal{F}_{a,x'}$ l'anneau des séries formelles à coéfficients réels en $(f_1, \dots, f_k, x_{k+1} - a_{k+1}, \dots, x_n - a_n)$ et on pose $\mathcal{F}_{x'}(\Lambda) = \prod_{a \in \Lambda} \mathcal{F}_{a,x'}$. pour chaque $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $\mathcal{F}^{(k-j)}_{a,x'}$ désigne le sous anneau de $\mathcal{F}_{a,x'}$ formé des séries indépendantes de $f_{k-j+1}, \dots, f_k$. On pose

$$\mathcal{F}^{(k-j)}_{x'}(\Lambda) = \prod_{a \in \Lambda} \mathcal{F}^{(k-j)}_{a,x'},$$
$$\tilde{W}^{(k-j)}(\Lambda, Y) = W(\Lambda, Y) \cap \mathcal{F}^{(k-j)}_{x'}(\Lambda).$$

Lemme 7. *Soit $\phi \in W(\Lambda, Y)$; il existe $\psi \in W(\Lambda, Y)$, $\chi_i \in \tilde{W}^{(k-1)}(\Lambda, Y)$ $i = 1, \dots, q$ telles que:*

$$\phi = P\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i f_k^{q-i}$$

ψ et χ_i sont uniques.

Preuve. Pour chaque $a \in \Lambda$, le germe de P en a, P_a, est un polynôme distingué de degré q par rapport à f_k; par application du théorème de division formelle en chaque $a \in \Lambda$; il existe $\psi \in J(\Lambda)$ et $\chi_i \in \mathcal{F}^{k-j}_{x'} \cap J(\Lambda)$, $i = 1, \dots, q$, uniques avec:

$$\phi = P\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i f_k^{q-i}.$$

On prolonge ψ , χ_i , $i = 1 \dots, q$ par 0 sur Y. On doit montrer que $\psi \in W(\Lambda, Y)$ et $\chi_i \tilde{W}^{(k-1)}(\Lambda, Y)$, $i = 1, \dots, q$.

On utilise les résultats et notations de la preuve du lemme 4. Il existe $c > 0$, $\nu \geq 1$ tels que, $\forall a \in \Lambda$, $B(a, c\underline{d}(a, Y)^\nu) \subset V_a$ et $\theta_a V_a \to W_{\theta(a)}$ est un difféomorphisme. On pose $\Omega_1 = \cup_{a \in \Lambda} B(a, c\underline{d}(a, Y)^\nu)$ et soit $\tilde{\beta}_i = ((D^\omega \beta_i)_{|}\Lambda)_{\omega \in \mathbb{N}^n}$, $i =$

$1, \dots, q$; $\tilde{\beta}_i \in \mathcal{E}(\Lambda)$; d'après le théorème 2, il existe $\overline{\beta}_i \in \mathcal{E}(\Omega_1)$ tel que $J\overline{\beta}_i = \tilde{\beta}_i$. On pose $A : \Omega_1 \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ défini par:

$$A(x) = (f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), x_{k+1}, \dots, x_n, \overline{\beta}_1(x), \dots, \overline{\beta}_q(x), f_k(x)). \quad (1)$$

On a $A(\Lambda) \subset V$; soit $K_a \subset V$ un compact tel que $A(\Lambda \cap B(a, c\underline{d}(a, Y)^\nu)) \subset K_a$, on pose $K'_a = \pi(K_a)$. d'après la proposition 8, il existe ψ'_a, $\chi'_{i,a}$, $i = 1, \dots, q$ éléments respectivement de $\mathcal{E}(K_a)$ et de $\mathcal{E}(K'_a)$ tels que:

$$\phi = Q\psi' + \sum_{i=1}^{q} \chi'_i t^{q-i} \text{ dans } \mathcal{E}(K_a).$$

On pose $\psi_a = \psi'_a \circ A_{|\Lambda \cap B_{a,c,\nu}}$, $\chi_{i,a} = \chi'_{i,a} \circ A_{|\Lambda \cap B_{a,c,\nu}}$, $i = 1, \dots, q$.

On a alors:

$$\phi_{|\Lambda \cap B_{a,c,\nu}} = P\psi_a + \sum_{i=1}^{q} \chi_{i,a} f_k^{q-i}.$$

D'après l'unicité, on a:

$$\begin{aligned}\psi_{|\Lambda \cap B_{a,c,\nu}} = \psi_a \in \mathcal{E}(\Lambda \cap B_{a,c,\nu}) \text{ et } (\chi_i)_{|\Lambda \cap B_{a,c,\nu}} \\ = \chi_{i,a} \in \mathcal{E}(\Lambda \cap B_{a,c,\nu}) \cap \mathcal{F}_{x'}(\Lambda)^{k-1}\end{aligned}$$

Donc $\psi \in \mathcal{E}(\Lambda)$ et $\chi_i \in \mathcal{E}(\Lambda) \cap \mathcal{F}_{x'}(\Lambda)^{k-1}$.

Il reste maintenant à trouver des majorations pour $|\psi|_m^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda}$ et $|\chi_i|_m{}^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda}$ $\forall i = 1, \dots, q$. D'après la continuité de l'homomorphisme de la proposition 8, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $C'_s > 0$ et $m_s \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\|\psi'_a\|_s{}^{K_a} \le C'_s \|\phi\|_{m_s}^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda}.$$

$$\|\chi'_a\|_s{}^{K'_a} \le C'_s \|\phi\|_{m_s}^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda}.$$

On en déduit alors, pour tout $(s, p) \in \mathbb{N}^2$

$$\|\psi'_a\|_s{}^{K_a} \le C'_s C'_{m_s,p} \underline{d}(a, Y)^p \quad (2)$$

$$\|\chi'_a\|_s{}^{K'_a} \le C'_s C'_{m_s,p} \underline{d}(a, Y)^p. \quad (3)$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $C"_m > 0$, ne dépendant que de n, q et $\lambda = \underline{d}(a, Y)^\nu$ tel que:

$$\|\psi_a\|_m{}^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda} = \|\psi'_a \circ A\|_m{}^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda} \le C"_m \|\psi'_a\|_m{}^{K_a} Sup_{k \le m} (\|A\|^{B_{a,c,\nu} \cap \Lambda})^k \quad (4)$$

$$\|\chi_a\|_m{}^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} = \|\chi_a' \circ A'\|_m{}^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} \leq C''_m \|\chi_a'\|_m{}^{K_a'} Sup_{k\leq m}(\|A\|^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda})^k. \quad (5)$$

D'autre part il existe $c \geq 1$ et $l \geq 1$ tel que $\forall x \in \Omega$ et $\forall j = 1, \ldots, k$

$$|f_j(x)| \leq c\underline{d}(a, \partial\Omega)^{-l} \leq c\underline{d}(a, Y)^{-l}.$$

D'après la proposition 5, $\forall a \in \Lambda$:

$$|\overline{\beta}_i|^{B_{a,c,\nu}} \leq c_{1,m}\|\tilde{\beta}_i\|^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda}$$

il existe $C_{2,m} > 0$ tel que:

$$\|\tilde{\beta}_i\|^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} \leq C_{2,m}|\tilde{\beta}_i|^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda}\underline{d}(a, Y)^{-l_1 m - l_2}.$$

Ceci est d'après la preuve du lemme 4.

D'après la preuve du lemme 3 on a: $|\tilde{\beta}_i|^{B_{a,c,\nu}\cap\Lambda} \leq C_{3,m}\underline{d}(a, Y)^{-l_1' m - l_2'}$.

Finalement, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ telles que:

$$\|\overline{\beta}_i\|^{B_{a,c,\nu}} \leq C_{4,m}\underline{d}(a, Y)^{-\alpha m - \beta}.$$

D'ou le résultat d'après (2), (3), (4), (5), (6) et (7).

On reprend les notations de 6.2; soit $\phi \in W(\Lambda_\delta, Y)$ par application successive du lemme 7 à ϕ et P_j, $j = 1, \ldots, s$, on a:

$$\phi = \sum_{j=1}^{s} \phi_j P_j + \sum_{0\leq l_j<q_j} \psi_{l_1\ldots l_s} f_{k-s+1}^{l_1} \cdots f_k^{l_s}$$

avec $\phi_j \in W(\Lambda_\delta, Y)$ et $\psi_{l_1\ldots l_s} \in W^{(k-s)}(\Lambda_\delta, Y)$. Comme $\phi \in (P_1 \ldots, P_s)J(\Lambda_\delta)$; on en déduit, d'apres le lemme ci dessous, que $\psi_{l_1\ldots l_s} = 0\ \forall l_i\ \ 0 \leq l_i < q_i$, $i = 1, \ldots, s$, donc $\phi \in (P_1, \ldots, P_s)W(\Lambda_\delta, Y)$.

On pose $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-s})$; soient $P_j \in \mathbb{R}[[x']][x_{n-s+j}]$ $j \in \{1, \ldots, s\}$ des polynômes distingués en x_{n-s+j} de degré q_j, on a:

Lemme 8. *Pour tout $g \in \mathbb{R}[[x]]$ on a:*

$$g = \sum_{j=1}^{s} g_j P_j + \sum_{0\leq l_j<q_j} h_{l_1\ldots l_s} x_{n-s+1}^{l_1} \cdots x_n^{l_s}$$

avec $h_{l_1\ldots l_s} \in \mathbb{R}[[x']]$ uniques.

Preuve. On pose
$$M = \frac{\mathbb{R}[[x]]}{(P_1, \ldots, P_s)\mathbb{R}[[x]]};$$
on doit montrer que M est un $\mathbb{R}[[x']]$-module libre et que $x_{n-s+1}^{l_1} \ldots x_n^{l_s}$, $0 \leq l_i < q_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, forment une base. Or M est un $\mathbb{R}[[x']]$- module plat car $(P_1, \ldots, P_s, x')$ forment un système de parametres de $\mathbb{R}[[x]]$; comme M est de présentation finie sur $\mathbb{R}[[x']]$ (division successive par $P_1, \ldots, P_s$) on en déduit que M est libre sur $\mathbb{R}[[x']]$.

Pour démontrer la deuxième assertion il faut voir que $x_{n-s+1}^{l_1} \ldots x_n^{l_s}$ forment un système minimal de générateurs où, en utilisant le lemme Nakayama, que $x_{n-s+1}^{l_1} \ldots x_n^{l_s}$ engendrent l'aspace vectoriel
$$\frac{\mathbb{R}[[x]]}{(P_1, \ldots, P_s, x_1, \ldots, x_{n-s})}$$
sur $\mathbb{R}$. La dimension de ce dernier est exactement $q_1 q_2 \ldots q_s$; d'où le résultat.

References

1. A.Elkhadiri et J.-Cl. Tougeron Famille noethériennes de modules sur $\underline{k}[[x]]$ et applications, Bull.Sc.Math.Vol.120,p.253-292 (1996).

2. J.Merien Faisceaux analytiques semi-cohérents et fonctions différentiables. Thèse, Rennes, 1980.

3. J.Cl. Tougeron Idéaux des fonctions différentiables, Ergebnisse der Mathematik. Band 71.

4. J.Cl. Tougeron Inégalités de £ojasiewicz globales, Ann.Inst.Fourier,Gronoble 41, 4 (1991) 841-865.

5. J.Cl. Tougeron Sur les fonctions C^∞ et les distributions qui appartiennent à la classe de Bernstein. Ann. Inst. Fourier, Tome XXIX fascicule 3, 1979.

Abdelhafed Elkhadiri
Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et Informatique
B.P 133 Kénitra Maroc

E-mail: kabdelhafed@hotmail.com